Capítulo 1

Conjuntos

1.1 Noção de conjuntos

Um conjunto é uma coleção de objetos. Esses objetos podem ser qualquer coisa. Costumamos chamar esses objetos de elementos do conjuntos. **Exemplos:**

1. Uma coleção de revista é um conjunto, cada uma dessas revistas é um elemento que pertence a esse conjunto.

2. Os alunos de uma sala de aula formam um conjunto. Você é um elemento que pertence a esse conjunto.

Se um objeto **a** é elemento de um conjunto **A**, dizemos que:

a pertence a **A** e escrevemos $a \in A$

Se o objeto **a** não for elemento do conjunto **A**, dizemos que:

a não pertence a **A** e escrevemos $a \notin A$

Exemplos:

1. Santa Catarina $\in$ região Sul

2. Goiás $\notin$ região Sul

1.2 Representação de um conjunto

Geralmente representamos um conjunto por letras maiúsculas (A, B, C, etc.) e os elementos por letras minúsculas (a, b, c, etc.). Vejamos as três formas principais de se representar um conjunto:

1.2.1 Representação tabular

A **representação tabular** de um conjunto é aquela em que os elementos são apresentados entre chaves e separados por vírgula ou por ponto e vírgula.
Exemplos:

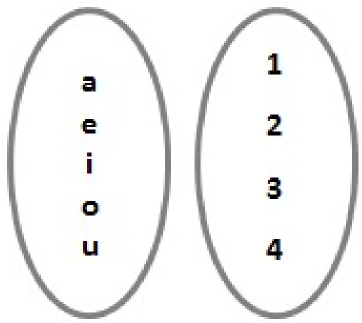
a) A = {a, e, i, o, u}

b) B = {1, 2, 3, 4}

c) C = {3,2; 0,5; 4,1; 6,9}

1.2.2 Representação por um diagrama de Venn

A representação de um conjunto por um **diagrama de Venn** é aquela em que os elementos são simbolizados por pontos interiores a uma região plana, delimitada por uma linha fechada que não se entrelaça.
Exemplo:



1.2.3 Representação por uma propriedade

A representação de um conjunto A por meio de uma **propriedade** é aquela em que os elementos são descritos por uma propriedade que os determina. Representa-se o conjunto A por:

$$A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade p}\}$$

(lê-se: "A é o conjunto de **todos** os elementos x, tal que x tem a propriedade p")

Exemplos:

a) $A = \{x \mid \underbrace{x \text{ é país da América do Sul}}_{\text{propriedade p}}\}$

b) $B = \{x \mid \underbrace{x \text{ é número inteiro que satisfaz a condição } x^2 - 4 = 0}_{\text{propriedade p}}\}$
Essa condição pode ser expressa pelo conjunto $B = \{-2, 2\}$.

Exercícios propostos

1. Represente os seguintes conjuntos indicando seus elementos:

   (a) $A = \{x \mid x$ é letra da palavra Ipanema$\}$

   (b) $B = \{x \mid x$ é sílaba da palavra Paraná$\}$

   (c) $C = \{x \mid x$ é número ímpar maior que 5 e menos que $10\}$

   (d) $D = \{x \mid x$ é número par maior que $10\}$

   (e) $E = \{x \mid x$ é número tal que $x^2 - 5x + 6 = 0\}$

2. Escreva uma propriedade que define os conjuntos:

   (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

   (b) $B = \{4, 6, 8, 10\}$

   (c) $C = \{$Amazonas, Acre, Rondônia$\}$

1.3 Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmos elementos. Por exemplo, se A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {5, 4, 3, 2, 1}, então $A = B$.
Se A é *não igual* a B, então A é diferente de B e denotamos por $A \neq B$.

1.4 Conjuntos vazio, unitário e universo

O conjunto **vazio** é aquele que não possui elemento algum. Representa-se o conjunto vazio por $\emptyset$ ou por $\{\}$.

Exemplos:

a) $A = \{x \mid x$ é número e $0 \cdot x = 5\} = \emptyset$

b) $B = \{x \mid x$ é palavra proparoxítona não acentuada, em português$\} = \{\}$

O conjunto **unitário** é todo conjunto formado por um único elemento.

Exemplos:

a) $A = \{5\}$

b) $B = \{x \mid x$ é estrela do sistema solar$\} = \{Sol\}$

O conjunto **universo** é o conjunto de todos os valores que a variável pode assumir. Indica-se por U.

Exemplos:

Exercícios propostos

1. Verifique se $A = B$ ou $A \neq B$ nos seguintes casos:
   (a) $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, a\}$
   (b) $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{x \mid x$ é número natural ímpar e $x < 7\}$
   (c) $A = \{2, 4\}$ e $B = \{x \mid x$ é algarismo par do número $45210\}$
   (d) $A = \{0, 2\}$ e $B = \{x \mid x^2 - 2x = 0\}$
2. Considerando $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ como conjunto universo, determine o conjunto solução de:
   (a) $\{x \in U \mid x + 2 \neq 5\}$
   (b) $\{x \in U \mid x + 5 = 2\}$
   (c) $\{x \in U \mid 3 < x < 5\}$
   (d) $\{x \in U \mid x$ é ímpar maior que $5\}$
   (e) $\{x \in U \mid x$ é múltiplo de $3\}$

1.5 Subconjuntos e a relação de inclusão

Consideremos dois conjuntos, **A** e **B**. Se todos elementos de **A** forem também elementos de **B** dizemos que **A** é um subconjunto de **B** ou que **A** está contido em **B**. Denotamos por $A \subset B$.
Se **A** não for subconjunto de **B**, escrevemos $A \not\subset B$. Nesse caso, existe pelo menos um elemento de **A** que não pertence a **B**.
Exemplos:

a) Considerando **P** o conjunto dos números pares e $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, temos:

$$\mathbf{P} = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\} \text{ e } \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

Nesse caso, $\mathbf{P} \subset \mathbb{N}$, pois todos os elementos de **P** pertencem a $\mathbb{N}$.

b) Se **A** é o conjunto dos retângulos e **B** é o conjunto dos quadriláteros, então $A \subset B$, pois todo retângulo é um quadrilátero.

Relação de inclusão

A relação $A \subset B$ chama-se *relação de inclusão*. Segue algumas propriedades dessa relação:

P1. Todo conjunto é subconjunto de si mesmo.
Exemplos:

(a) $\{5, 4, 0\} \subset \{5, 4, 0\}$

(b) $\emptyset \subset \emptyset$

P2. O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.
Exemplo:

$$\emptyset \subset A (\forall A)$$

P3. Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = C$ (propriedade antissimétrica).

P4. Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$ (propriedade transitiva).

O símbolo $\forall$ é lido "qualquer que seja".

Exercícios propostos

1. Dados os subconjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{3, 4, 5\}$ e $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, classifique em verdadeiro (**V**) ou falso (**F**):

   (a) $A \subset B$

   (b) $C \subset A$

   (c) $B \subset D$

   (d) $D \subset B$

   (e) $C \not\subset A$

   (f) $A \subset D$

   (g) $B \subset C$

   (h) $B \subset B$

   (i) $\emptyset \not\subset A$

   (j) $\emptyset \subset B$

2. Considerando que:

   - A é o conjunto dos números naturais ímpares menores que 10;
   - B é o conjunto dos dez primeiros números naturais;
   - C é o conjunto dos números primos menores que 9;

   use os símbolos $\subset$ ou $\not\subset$ e relacione esses conjuntos na ordem dada:

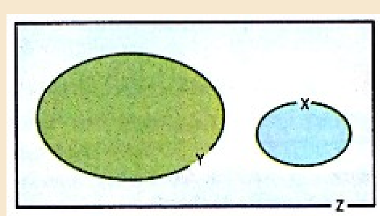
   (a) A e B

   (b) C e A

   (c) C e B

   (d) A e C

3. Observe o diagrama a seguir. Os conjuntos X, Y e Z não são vazios. Escreva algumas relações verdadeiras entre eles usando os símbulos $\subset$ ou $\not\subset$.



1.6 Conjunto das partes

Dado o conjunto $A = \{a, e, i\}$, é possível escrever todos os subconjuntos (ou todas as partes) de A. Esse conjunto formado por todos os subconjuntos de A é chamado de **conjunto das partes** de A e denotamos por $P(A)$. Assim, temos:

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{e, i\}, \{a, e, i\}\}$$

Observe que $\{a\}, \{a, i\}, \{e, i\}$, por exemplo, são *elementos* de $P(A)$. Portanto, escrevemos $\{a\} \in P(A)$, $\{a, i\} \in P(A)$ e $\{e, i\} \in P(A)$, e *não* $\{a\} \subset P(A)$, $\{a, i\} \subset P(A)$ e $\{e, i\} \subset P(A)$. Veja que $\emptyset \subset P(A)$ e $\emptyset \in P(A)$.
Observações:

O1. $\emptyset$ não tem nenhum elemento e $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ tem 1 elemento.

O2. $A = \{a\}$ tem 1 elemento e $P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$ tem 2 elementos.

O3. $A = \{a, e\}$ tem 2 elemento e $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{e\}, \{a, e\}\}$ tem 4 elementos.

O4. $A = \{a, e, i\}$ tem 3 elemento e $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{e, i\}, \{a, e, i\}\}$ tem 8 elementos.

Lembre-se de que $2^0 = 1; 2^1 = 2; 2^2 = 4; 2^3 = 8$. É possível afirmar então que, se A tem n elementos, $P(A)$ tem 2^n elementos.

1.7 Conjunto complementar

Sejam A um conjunto e U o conjunto universo. Chama-se **complementar** de A, que indicamos por $\complement_U^A$ *ou* $A^\complement$ (lê-se: "complementar de A em relação a U"), o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a U e não pertencem a A.

$$A \subset U \Leftrightarrow \complement_U^A = \{x \mid x \in U \text{ } e \text{ } x \notin A\}$$

Exemplo:
Seja $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, então $A^\complement = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Exercícios propostos

1. Dados $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$, determine:
   (a) $P(A)$;
   (b) $P(B)$;
   (c) o número de elementos de $P(A)$;
   (d) o número de elementos de $P(B)$;
2. Dados $U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$, $A = \{1, 5, 7\}$, $B = \{7, 9, 11\}$ e $C = \{1, 5, 7, 11, 15\}$, determine:
   (a) $\complement_U^A$
   (b) $\complement_U^B$
   (c) $\complement_U^C$
   (d) $\complement_C^A$

Exercícios complementares

1. Dado o conjunto $A = \{m, \{n\}, \{p, q\}\}$, verifique quais afirmações são falsas:
   (a) $m \in A$;
   (b) $\emptyset \subset A$;
   (c) $\{m\} \in A$;
   (d) $\{n\} \in A$;
   (e) $\{n\} \subset A$;
   (f) $n \notin A$;
   (g) $p \in A$;
   (h) $\{p, q\} \in A$;
   (i) $\{\{n\}\} \subset A$;
   (j) $\{\{p, q\}\} \subset A$;

2. (F. M. SANTA CASA - SP) Indica-se com $P(A)$ o conjunto das partes de um conjunto A. O número de elementos do conjunto $P(P(\emptyset))$ é:
   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 3
   (e) 4