FCF611 - Lógica II **Nome:** *Fellipe de Carvalho Silva*
2018.2
Exercício de Nivelamento
20/08/2018

---

1. Raciocinando semânticamente, determine a validade ou invalidade nos casos a seguir.

   (a) $A \vee B, \neg A \vDash B$

   (b) $A \leftrightarrow B, \neg A \vDash \neg B$

   (c) $\neg (A \wedge B) \vDash \neg B \wedge \neg A$

   (d) $A \to B \vDash A \vee B$

   (e) $\neg A \to \neg B \vDash A \to B$

   (f) $A, A \to B \vDash A \leftrightarrow B$

   (g) $B \to \neg C \vDash \neg(B \wedge C)$

   (h) $\neg(A \vee B), C \leftrightarrow A \vDash \neg C$

   (i) $\neg(A \wedge B), D \leftrightarrow A \vDash \neg D$

   (j) $A \vDash (A \to (B \wedge A)) \to (A \wedge B)$

   (k) $(B \wedge C) \to A, \neg B, \neg C \vDash \neg A$

   (l) $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \vDash A \leftrightarrow C$

   (m) $A \to (B \vee C), (B \wedge C) \to D \vDash A \to D$

   (n) $(\neg A \vee B) \vee C, (B \vee C) \to D \vDash A \to D$

   (o) $(A \to B), A \vDash A$

   (p) $(A \wedge B) \to C, A \wedge \neg C, B \vDash C \wedge \neg C$

Exemplo I.

a) $A \vee B, \neg A \vDash B$

Demonstração. Iremos demonstrar que o presente argumento é válido. Suponha, por absurdo, que o argumento é inválido. Assim, há uma valoração v, tal que: i. $v(A \vee B) = V$, ii. $v(\neg A) = V$ e iii. $v(B) = F$. Note que de i. e iii., pelo significado da ($\vee$), temos que iv. $v(A) = V$. De iv., pelo significado da ($\neg$), temos que v. $v(\neg A) = F$. Contudo, de ii. e v., obtemos uma contradição, visto que v é função. Segue-se disso que não há valoração que torne as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Portanto, o argumento é válido. □

Exemplo II.

m) $A \to (B \vee C), (B \wedge C) \to D \vDash A \to D$

Demonstração. Vamos mostrar que $A \to (B \vee C), (B \wedge C) \to D \nvDash A \to D$. Para ver isto, tome a valoração v, tal que (i) $v(A) = V, v(D) = F, v(B) = V, v(C) = F$. Como $v(B) = V$, pelo significado da ($\vee$) temos que $v(B \vee C) = V$. Daí, pelo significado da ($\to$), podemos determinar que (ii) $v(A \to (B \vee C)) = V$. Do fato de que $v(C) = F$ e de que $v(D) = F$, pelo significado da ($\wedge$) e ($\to$), temos que (iii) $v((B \wedge C) \to D) = V$. Por (i) e pelo significado da ($\to$), segue-se que (iv) $v(A \to D) = F$. Assim, por (ii) e (iii), sabemos que a valoração dada torna as premissas verdadeiras, mas por (iv), que torna a conclusão falsa. Logo, o argumento é inválido. □

Resoluções.

a) Respondido no Exemplo I.

b) $A \leftrightarrow B, \neg A \vDash \neg B$

Demonstração. Iremos demonstrar que o presente argumento é válido. Suponha, por absurdo, que o argumento é inválido. Assim, há uma valoração v, tal que: i. $v(A \leftrightarrow B) = V$, ii. $v(\neg A) = V$ e iii. $v(\neg B) = F$. De iii., pelo significado da ($\neg$), temos que iv. $v(B) = V$. De i. e iv., pelo significado da ($\leftrightarrow$), temos que v. $v(A) = V$. Contudo, de ii. e de v., obtemos uma contradição, visto que v é função. Segue-se disso que não há valoração que torne as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Portanto, o argumento é válido.

$\square$

c) $\neg (A \wedge B) \vDash \neg B \wedge \neg A$

Demonstração. Vamos mostrar que $\neg (A \wedge B) \nvDash \neg B \wedge \neg A$. Para ver isto, tome a valoração v, tal que: i. $v(A) = V$, $v(B) = F$. Por i. e pelo significado da ($\wedge$), temos que $v(A \wedge B) = F$. Daí, pelo significado da ($\neg$), podemos determinar que ii. $v(\neg (A \wedge B)) = V$. Porém por i. e pelo significado da ($\neg$), determinamos que iii. $v(\neg A) = F$. Então, por iii. e pelo significado da ($\wedge$) temos iv. $v(\neg B \wedge \neg A) = F$. Assim, por ii., sabemos que a valoração dada torna as premissas verdadeiras, mas por iv., que torna a conclusão falsa. Logo, o argumento é inválido.

$\square$

d) $A \rightarrow B \vDash A \vee B$

Demonstração. Vamos mostrar que $A \rightarrow B \nvDash A \vee B$. Para ver isto, tome a valoração v, tal que: i. $v(A) = F$, $v(B) = F$. Por i. e pelo significado da ($\rightarrow$), temos que ii. $v(A \rightarrow B) = V$. Porém por i. e pelo significado da ($\vee$), temos que iii. $v(A \vee B) = F$. Assim, por ii., sabemos que a valoração dada torna as premissas verdadeiras, mas por iii., que torna a conclusão falsa. Logo, o argumento é inválido.

$\square$

e) $\neg A \rightarrow \neg B \vDash A \rightarrow B$

Demonstração. Vamos mostrar que $\neg A \rightarrow \neg B \nvDash A \rightarrow B$. Para ver isto, tome a valoração v, tal que: i. $v(\neg A) = F, v(\neg B) = V$. Por i. e pelo significado da ($\rightarrow$), temos que ii. $v(\neg A \rightarrow \neg B) = V$. Enquanto por i. e pelo significado da ($\neg$), temos que iii. $v(A) = V$, $v(B) = F$. Daí, por iii. e pelo significado da ($\rightarrow$), temos que iv. $v(A \rightarrow B) = F$. Assim, por ii. sabemos que a valoração dada torna as premissas verdadeiras, mas por iv., que torna a conclusão falsa. Logo, o argumento é inválido.

$\square$

f) $A, A \to B \vDash A \leftrightarrow B$

Demonstração. Iremos demonstrar que o presente argumento é válido. Suponha, por absurdo, que o argumento é inválido. Assim, há uma valoração v, tal que: i. $v(A) = V$, ii. $v(A \to B) = V$ e iii. $v(A \leftrightarrow B) = F$. De i. e ii., pelo significado da ($\to$), temos que iv. $v(B) = V$. De i. e iv., pelo significado da ($\leftrightarrow$), temos que v. $v(A \leftrightarrow B) = V$. Contudo, de iii. e v., obtemos uma contradição, visto que v é função. Segue-se disso que não há valoração que torne as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Portanto, o argumento é válido.

□

g) $B \to \neg C \vDash \neg(B \wedge C)$

Demonstração. Iremos demonstrar que o presente argumento é válido. Suponha, por absurdo, que o argumento é inválido. Assim, há uma valoração v, tal que: i. $v(B \to \neg C) = V$ e ii. $v(\neg(B \wedge C)) = F$. De ii., pelo significado da ($\neg$), temos que iii. $v(B \wedge C) = V$. De iii., pelo significado da ($\wedge$), temos que iv. $v(B) = V$, $v(C) = V$. De iv., pelo significado da ($\neg$), temos que v. $v(B) = V$, $v(\neg C) = F$. De v., pelo significado da ($\to$), temos que vi. $v(B \to \neg C) = F$. Contudo, de i. e vi., obtemos uma contradição, visto que v é função. Segue-se disso que não há valoração que torne as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Portanto, o argumento é válido.

□

h) $\neg(A \vee B), C \leftrightarrow A \vDash \neg C$

Demonstração. Iremos demonstrar que o presente argumento é válido. Suponha, por absurdo, que o argumento é inválido. Assim, há uma valoração v, tal que: i. $v(\neg(A \vee B)) = V$, ii. $v(C \leftrightarrow A) = V$ e iii. $v(\neg C) = F$. De i., pelo significado da ($\neg$), temos que iv. $v(A \vee B) = F$. De iv., pelo significado da ($\vee$), temos que v. $v(A) = F$, $v(B) = F$. De ii. e v., pelo significado de ($\leftrightarrow$), temos que vi. $v(C) = F$. De vi., pelo significado da ($\neg$), temos que vii. $v(\neg C) = V$. Contudo, de iii. e vii., obtemos uma contradição, visto que v é função. Segue-se disso que não há valoração que torne as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Portanto, o argumento é válido.

□

i) $\neg(A \wedge B), D \leftrightarrow A \vDash \neg D$

Demonstração. Vamos mostrar que $\neg(A \wedge B), D \leftrightarrow A \nvDash \neg D$. Para ver isto, tome a valoração v, tal que: i. $v(A) = V$, $v(B) = F$, $v(D) = V$. Por i. e pelo significado da ($\wedge$), temos que ii. $v(A \wedge B) = F$. Por ii. e pelo significado da ($\neg$), temos que iii. $v(\neg(A \wedge B)) = V$. Por i. e pelo significado da ($\leftrightarrow$), temos que iv. $v(D \leftrightarrow A) = V$. Daí, por i. e pelo significado da ($\neg$), temos que v. $v(\neg D) = F$. Assim, por iii. e por iv., sabemos que a valoração dada torna as premissas verdadeiras, mas por v., que torna a conclusão falsa. Logo, o argumento é inválido.

□

j) $A \vDash (A \to (B \wedge A)) \to (A \wedge B)$

Demonstração. Iremos demonstrar que o presente argumento é válido. Suponha, por absurdo, que o argumento é inválido. Assim, há uma valoração v, tal que: i. $v(A) = V$ e ii. $v((A \to (B \wedge A)) \to (A \wedge B)) = F$. De ii., pelo significado da ($\to$), temos que iii. $v(A \to (B \wedge A)) = V$, $v(A \wedge B) = F$. De i. e iii., pelo significado da ($\wedge$), temos quem iv. $v(B) = F$. De iv., pelo significado da ($\wedge$), temos que v. $v(B \wedge A) = F$. De i. e v., pelo significado da ($\to$), temos que vi. $v(A \to (B \wedge A)) = F$. Contudo, de iii. e vi., obtemos uma contradição, visto que v é função. Segue-se disso que não há valoração que torne as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Portanto, o argumento é válido. □

k) $(B \wedge C) \to A, \neg B, \neg C \vDash \neg A$

Demonstração. Vamos mostrar que $(B \wedge C) \to A, \neg B, \neg C \nvDash \neg A$. Para ver isto, tome a valoração v, tal que: i. $v(B) = F$, $v(C) = F$, $v(A) = V$. Por i. e pelo significado da ($\wedge$), temos que ii. $v(B \wedge C) = F$. Por i., ii. e pelo significado da ($\to$), temos que iii. $v((B \wedge C) \to A) = V$. Por i. e pelo significado da ($\neg$), temos que iv. $v(\neg B) = V$, $v(\neg C) = V$. Daí, por i. e pelo significado da ($\neg$), temos que v. $v(\neg A) = F$. Assim, por iii. e por iv., sabemos que a valoração dada torna as premissas verdadeiras, mas por iv., que torna a conclusão falsa. Logo, o argumento é inválido. □

l) $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \vDash A \leftrightarrow C$

Demonstração. Iremos demonstrar que o presente argumento é válido. Suponha, por absurdo, que o argumento é inválido. Assim, há uma valoração v, tal que: i. $v(A \leftrightarrow B) = V$, ii. $v(B \leftrightarrow C) = V$ e iii. $v(A \leftrightarrow C) = F$. De i., pelo significado da ($\leftrightarrow$), temos que iv. a. $v(A) = V$, $v(B) = V$, ou b. $v(A) = F$, $v(B) = F$. De i. e ii., pelo significado da ($\leftrightarrow$), temos que v. a. $v(B) = V$, $v(C) = V$, ou b. $v(B) = F$, $v(C) = F$. De iii., pelo significado da ($\leftrightarrow$), temos que vi. a. $v(A) = V$, $v(C) = F$, ou b. $v(A) = F$, $v(C) = V$. Contudo, de iv., v. e vi., nas duas valorações possíveis, obtemos contradições, visto que v é função. Segue-se disso que não há valoração que torne as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Portanto, o argumento é válido. □

m) Respondido no Exemplo II.

n) $(\neg A \vee B) \vee C, (B \vee C) \to D \vDash A \to D$

Demonstração. Iremos demonstrar que o presente argumento é válido. Suponha, por absurdo, que o argumento é inválido. Assim, há uma valoração v, tal que: i. $v((\neg A \vee B) \vee C) = V$, ii. $v((B \vee C) \to D) = V$ e iii. $v(A \to D) = F$. De iii., pelo significado da ($\to$), temos que iv. $v(A) = V$, $v(D) = F$. De ii. e iv., pelo significado da ($\to$), temos que v. $v(B \vee C) = F$. De v., e pelo significado da ($\vee$), temos que vi. $v(B) = F$, $v(C) = F$. De iv., pelo significado da ($\neg$), temos que vii. $v(\neg A) = F$. De vi. e vii., pelo significado da ($\vee$), temos que viii. $v(\neg A \vee B) = F$. De vi. e viii., pelo significado da ($\vee$), temos que ix. $v((\neg A \vee B) \vee C) = F$. Contudo, de i. e ix., obtemos uma contradição, visto que v é função. Segue-se disso que não há valoração que torne as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Portanto, o argumento é válido.

$\square$

o) $(A \to B), A \vDash A$

Demonstração. Iremos demonstrar que o presente argumento é válido. Suponha, por absurdo, que o argumento é inválido. Assim, há uma valoração v, tal que: i. $v(A \to B) = V$, ii. $v(A) = V$ e iii. $v(A) = F$. Logo de início, de ii. e iii., obtemos uma contradição, visto que v é função. Segue-se disso que não há valoração que torne as premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Portanto, o argumento é válido.

$\square$

p) $(A \wedge B) \to C, A \wedge \neg C, B \vDash C \wedge \neg C$

Demonstração. Iremos demonstrar que o presente argumento é inválido. Para isso, basta perceber que sua conclusão em si mesma é uma contradição. Tomando a conclusão como verdadeira, temos uma valoração v, tal que: i. $v(C \wedge \neg C) = V$. De i., pelo significado da ($\wedge$), temos que ii. $v(C) = V$, $v(\neg C) = V$. De $v(\neg C) = V$, pelo significado da ($\neg$), temos que iii. $v(C) = F$. De iii. e i. obtemos uma contradição. Segue-se disso que não há valoração que torne a conclusão verdadeira, ainda que independente das premissas. Portanto, o argumento é inválido.

$\square$