



**VILNIAUS UNIVERSITETAS**  
**MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS**  
**{STUDIJŲ PROGRAMOS} STUDIJŲ PROGRAMA**

{Darbo tipas}

**Darbo pavadinimas lietuvių kalba**

**Work Title in English**

Vardas Pavardė

Darbo vadovas : pedagoginis/mokslinis vardas Vardas Pavardė

Mokslinis konsultantas : pedagoginis/mokslinis vardas Vardas Pavardė

Recenzentas : pedagoginis/mokslinis vardas Vardas Pavardė

**Vilnius**  
**2024**

## **Padėka**

Darbo autorius dėkoja Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Informacinių technologijų atviros prieigos centrui už suteiktus našųjų skaičiavimų (angl. High Performance Computing, HPC) išteklius šio darbo tyrimui atlikti.

Čia taip pat galima pridėti padėkas įvairiems kitiems dalykams, pavyzdžiui: vadovui, universitetui, įmonei ir t. t.

## Santrauka

Darbo santrauka.

**Raktiniai žodžiai:** čia surašomi su darbu susiję raktiniai žodžiai, *minimalus raktinių žodžių kiekis - 3*, tačiau jų gali būti ir daugiau.

## Summary

Summary in english.

**Keywords:** work related keywords, with a *minimum of 3 keywords*, but can be more.

## Iliustracijų sąrašas

1	Paveikslėlių numeriai rašomi apačioje, antraštė rašoma apačioje . . . . .	15
---	---	----

## Lentelių sąrašas

1	Lentelės numeruojamos viršuje, antraštės rašomos viršuje . . . . .	14
---	--	----

# Turinys

<b>Santrauka</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>Summary</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>Iliustracijų sąrašas</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>Lentelių sąrašas</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>Žymėjimai</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>Santrumpos</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>Ivadas</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>1. Formatavimas</b> . . . . .	<b>11</b>
1.1. Matematinis tekstas . . . . .	11
1.2. Matematinų rezultatų formulavimas . . . . .	12
1.3. Lentelės . . . . .	14
1.4. Paveikslėliai, grafikai, diagramos, nuotraukos . . . . .	14
1.5. Sąrašai . . . . .	15
<b>2. Programinio kodo pateikimas</b> . . . . .	<b>16</b>
2.1. Algoritmai . . . . .	16
2.1.1. Skyrelio pavyzdys . . . . .	16
<b>Rezultatai ir išvados</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>1 priedas. Citavimo pavyzdžiai</b> . . . . .	<b>19</b>

## Žymėjimai

Šis skyrius skirtas, jei yra naudojami žymėjimai. Pavyzdžiui:

- $\mathbb{E} X$  žymi atsitiktinio dydžio  $X$  vidurkj.



## Santrumpos

Šis skyrius skirtas, jei yra naudojamos santrumpos. Pavyzdžiui:

v.p.n.a.d. vienodai pasiskirstę nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai

## **Įvadas**

Bet kokiam rašto darbui rašyti būtina naudotis atitinkamos studijų programos metodiniais nurodymais<sup>1</sup>. Juose rasite visus rašto darbų nurodymus susijusius su citavimu, darbo struktūra, apimtimi ir t. t.

---

<sup>1</sup>Visų programų naujausius metodinius reikalavimus galima rasti čia, atitinkamoje programoje: <https://mif.vu.lt/lt3/studijos/bakalaurams>

# 1. Formatavimas

Šiame skyriuje bus pateikti pavyzdžiai matematinio teksto, lentelių ir paveikslėlių formatavimams bei aprašyta, kaip taisyklingai suformuluoti matematinius jūsų baigiamojo darbo rezultatus.

## 1.1. Matematinis tekstas

Matematinės formulės gali būti įterptos teksto pastraipose, formulės  $\text{\LaTeX}$  kodą atskiriant simboliais  $\$ . . \$$ . Pavyzdys: trigonometrinė tapatybė  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

Tačiau formulės atrodo daug gražiau, jeigu jos bus išskirtos į atskiras lygtis, formulės kodą patalpinant į aplinką  $\[ . . \]$ . Štai tokios lygties pavyzdys:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Šioje lygtyje buvo panaudoti matematiniai simboliai  $\mathbb{R}$  ir  $e$ , kurių komandos  $\backslash\mathbb{R}$  ir  $\backslash e$  apibrėžtos šablono pradžioje.

Kartais formulės užima kelias eilutes, pvz.:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + 1 + 0 = \left( \frac{\sqrt{16}}{\tan^2 \pi/3 + 1} \right) + \ln e + \sin \pi \\ &= (\sin^2 17 + \cos^2 17)^{\ln e} + \cos 0 + (x^{1/\ln x})'. \end{aligned} \tag{1}$$

Nepamirškite padėti taško (.) formulės pabaigoje, jeigu tai sakinio pabaiga. Taip pat akreipkite dėmesį į skliaustų, kurių viduje stovi didelė trupmena  $\backslash\frac$ , aukštį, kuris automatiškai reguliuojamas komandomis  $\backslash\left( . . \backslash\right)$  arba nurodomas komandomis  $\backslash\big, \backslash\Big, \backslash\bigg$ .

Jeigu formulės prisireiktų vėliau, jos nereikia kiekvieną kartą perrašinėti iš naujo. Reikiamą formulę visada galima pacituoti su komanda  $\backslash\eqref$ . Pavyzdžiui, aukščiau užrašyta formulė su numeriu cituojama taip: lygtis (1). Tam reikia komanda  $\backslash\label$  formulei priskirti laikiną pavadinimą, kurį  $\text{\LaTeX}$  automatiškai pakeis į reikiamą numerį. Daugiau informacijos apie  $\text{\LaTeX}$  matematinius simbolius, lygtis, matematinės aplinkas ir komandas galima rasti šiame dokumente [SP].

Pateiksime dar keletą formulių, kuriose naudojamos sudėtingesnės matematinės komandos. Matricos ir determinantai užrašomi naudojant  $\text{\LaTeX}$  aplinkas  $\text{\pmatrix}$  ir  $\text{\vmatrix}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = -2.$$

Sudėtingesnėms lygtims ir matricoms formatuoti labai praverčia paketo  $\text{\mathhtools}$  [ML3] komandomis. Paketas  $\text{\mathhtools}$  įtrauktas į darbo šabloną, todėl jo komandomis galima naudotis tiesiogiai.

Išvestinė užrašoma naudojant apostrofo simbolį ( $'$ ), pavyzdžiui,

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Teiloro polinomas:

$$p(x) = p(a) + p'(a)(x - a) + \frac{p''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Paprastoms ir dalinėms išvestinėms, diferencialams, gradientams ir pan. užrašyti į darbo šabloną įtrauktos labai patogios komandos `\dv` ir `\pdv`, `\dd`, `\grad` iš `physics` paketo [Bar]:

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2f}{dx^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^5 f}{\partial x^5}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad df, \quad \nabla f$$

Integralą su režiais užrašysime naudodami  $\LaTeX$ komandą `\int_{a}^{b}`:

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b) = F(x) \Big|_a^b$$

Daugialypiams, paviršiniams, kreiviniams integralams užrašyti galima naudoti komandas `\iint`, `\iiint`, `\oint`, ir pan.

$$\iint_D f(x, y) dx dy, \quad \iint_D f(x, y) dS, \quad \int_{\gamma} f(x, y) dl, \quad \oint_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

## 1.2. Matematinų rezultatų formulavimas

Jūsų darbo matematiniais rezultatams suformuluoti reikėtų naudoti aplinkas

*Apibrėžimas, Teiginys, Teorema, Lema,*

*Išvada, Pastaba, Pavyzdys, Įrodymas.*

Šios aplinkos jau yra apibrėžtos jūsų baigiamojo darbo šablone `VUMIFTemplateClass.cls`, sulietuvinus standartines  $\LaTeX$  komandas

`definition, proposition, theorem, lemma,`

`corollary, remark, example, proof.`

Apibrėžimo pavyzdys:

**1.2..1 Apibrėžimas.** Skaičius  $p \in \mathbb{N}$  yra vadinamas *pirminiu skaičiumi*, jeigu jisai dalijasi tik iš 1 ir savęs paties. Pirminių skaičių aibė yra žymima  $\mathbb{P}$ .

Teiginio pavyzdys:

**1.2..2 Teiginys.** Dviejų nepriklausomų atsitiktinių dydžių  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sandaugos  $XY$  vidurkis lygus tų pradinių dydžių vidurkių sandaugai:

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{\Omega} X(\omega)Y(\omega)d\mu(\omega) = \mathbb{E} X \cdot \mathbb{E} Y,$$

su sąlyga, kad  $X, Y$  ir  $XY$  vidurkiai egzistuoja.

Svarbūs matematiniai teiginiai yra vadinami *teoremomis*:

**1.2..3 Teorema** (Pirmoji teorema apie izomorfizmą). Sakykime, kad  $f : G \rightarrow H$  – grupių  $G$  ir  $H$  homomorfizmas. Tada grupės  $G$  vaizdas  $f(G)$  izomorfiškas faktorgrupei  $G / \ker(f)$ , tai yra

$$f(G) \cong G / \ker(f).$$

Trumpesni pagalbiniai teiginiai vadinami *lemomis*. Tačiau ir lemy formuluotės gali būti pakankamai sudėtingos:

**1.2..4 Lema** (Lema apie vektorių pakeitimą). Tarkime, kad tiesinės erdvės  $V$  virš kūno  $k$  vektoriai

$$v_1, v_2, \dots, v_s \tag{2}$$

ys tiesiškai nepriklausomi, ir kad kiekvienas šios šeimos vektorius  $v_i, 1 \leq i \leq s$  tiesiškai išreiškiamas vektoriais

$$w_1, w_2, \dots, w_t. \tag{3}$$

Tuomet  $s \leq t$ , ir egzistuoja toks vektorių šeimos (3) pošeimis  $w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_s}$ , kurį pakeitę vektoriais  $v_1, v_2, \dots, v_s$ , gausime vektorių šeimai (3) ekvivalenčių šeimą (3).

Aplinka *Pastaba* skirta smulkiems pastebėjimams:

**1.2..5 Pastaba.** Teoremos sąlyga, kad intervalas  $[a, b]$  būtų kompaktiškas, o funkcija  $f(x)$  tame intervale būtų tolydi, yra būtina.

Kita aplinka *Pavyzdys*, skirta trumpiems skaitiniams arba formulų pavyzdžiams:

**1.2..6 Pavyzdys.** Lygčių sistemos

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

sprendinių Kramerio formulė:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D},$$

čia

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad D_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = ed - bf, \quad D_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af - ec.$$

Įrodymams užrašyti naudojama sulietuvinta aplinka `proof`. Žemiau užrašyti teiginys ir to teiginio įrodymas. Įrodymo pabaigą  $\text{\LaTeX}$  automatiškai pažymi  $\square$  simboliu.

**1.2..7 Teiginys.** Kvadratinė matrica  $A$  yra neišsigimusi tada ir tik tada, kai  $\det A \neq 0$ .

Įrodymas. Jeigu  $A$  yra neišsigimusi, tai egzistuoja matrica  $B$ , tokia kad  $AB = I$ . Remiantis matricų sandaugos determinanto savybe,

$$\det A \cdot \det B = \det AB = \det I = 1.$$

Taigi,  $\det A \neq 0$ . Dabar tarkime, kad  $\det A \neq 0$ . Tegul  $A^*$  yra transponuota adjunktų matrica. Tuomet:

$$\begin{aligned}
 AA^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} \\
 &= \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot I.
 \end{aligned}$$

Taigi,  $A \cdot A^* = \det A \cdot I$ . Padaliję abi tapatybės puses iš skaičiaus  $\det A \neq 0$ , gauname  $A \cdot \left(\frac{1}{\det A} A^*\right) = I$ . Panašiai galime parodyti, kad  $\left(\frac{1}{\det A} A^*\right) \cdot A = I$ . Vadinasi,  $\frac{1}{\det A} A^*$  yra matricos  $A$  atvirkštinė, taigi  $A$  yra neišsigimusi.  $\square$

Atkreipsime dėmesį, kad matematinės aplinkos numeruojamos automatiškai. Kaip ir formules, matematinis apibrėžimus, teiginius, pavyzdžius galima cituoti kitur tekste pirma įvardijant su `\label` o tada reikiamoje vietoje sukuriame citavimo nuorodą `\ref`. Pavyzdžiui, mes galime pacituoti Teoremą 1.2.3 arba Lemą 1.2.4 tose teksto vietose, kuriose mums reikia jomis pasiremti.

### 1.3. Lentelės

Jei yra pristatomos lentelės, tai lentelių nuorodos turėtų būti paminėti tekste, pavyzdžiui: 1 lentelėje matomi kažkokie rezultatai.

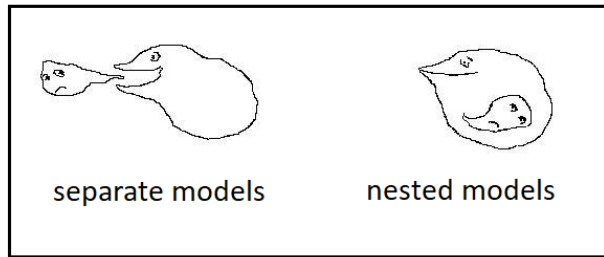
**1 lentelė.** *Lentelės numeruojamos viršuje, antraštės rašomos viršuje*

Stulpelis 1	Stulpelis 2	Stulpelis 3

Kiekviena lentelė būtinai turi turėti pavadinimą, kuris, kaip ir lentelės numeris, rašomas toje pačioje eilutėje virš lentelės. Visos lentelės numeruojamos paeiliui (nerekomenduojama numeruoti raidėmis, pvz., 7 a lentelė).

### 1.4. Paveikslėliai, grafikai, diagramos, nuotraukos

Jei darbe naudojami paveikslėliai, būtina juos paminėti tekste, pvz.: 1 paveikslėlyje matome paveikslėlio pateikimo pavyzdį.



**1 pav.** *Paveikslėlių numeriai rašomi apačioje, antraštė rašoma apačioje*

Toliau eina tekstas po paveikslėliu.

## 1.5. Sąrašai

Nenumeruojamo sąrašo pavyzdys:

- pirmasis elementas;
- antrasis elementas.

Numeruojamo sąrašo pavyzdys:

1. lorem ipsum dolor sit amet;
2. consectetur adipiscing elit;
3. vivamus a nisl gravida.

## 2. Programinio kodo pateikimas

Šiame skyriuje pateikiamas programinio kodo pateikimo būdas rašto darbe.

### 2.1. Algoritmai

Algoritmai, lygiai taip pat, kaip ir paveikslėliai ar lentelės, yra numeruojami. Juos būtina paminėti tekste, pvz.: 1 algoritmas naudojamas surasti minimalią funkcijos  $\mathcal{L}$  reikšmę.

---

**1 algoritmas** Gradientinio nusileidimo pseudokodas

---

```
1: # Darome prielaidą, kad  $\mathcal{L}$  apibrėžtas tekste
2: Įeitis:  $\mathcal{D}$  – duomenų rinkinys
3: Įeitis:  $\theta_0$  – parametų atsitiktinių reikšmių inicializavimas
4: Įeitis:  $\gamma$  – žingsnio dydis, mokymosi greitis (angl. learning rate, step size)
5: Įeitis:  $m$  – epochų skaičius
6: for  $i = 1, 2, \dots, m$  do
7:    $\theta_i := \theta_{i-1} - \gamma \nabla_{\theta} \mathcal{L}(\mathcal{D}, \theta_{i-1})$ 
8:   # Funkcijos  $\mathcal{L}$  išvestinė suskaičiuojama automatiškai, autograd pagalba
9: end for
```

---

#### 2.1.1. Skyrelio pavyzdys

Nebūtina naudoti daug skyrelių (*subsubsections*).



## **Rezultatai ir išvados**

Detaliau, kas turi būti parašyta šiame skyriuje, rasite atitinkamos programos metodiniuose reikalavimuose.

## Literatūra ir šaltiniai

- [Bar] S. C. de la Barrera. *The physics package*. URL: <https://ctan.altspu.ru/macros/latex/contrib/physics/physics.pdf> (žiūrėta 2024-06-27).
- [ML3] M. Høgholm, L. Madsen, the  $\text{\LaTeX}$  project. *The mathtools package*. URL: <https://sunsite.icm.edu.pl/pub/CTAN/macros/latex/contrib/mathtools/mathtools.pdf> (žiūrėta 2024-06-27).
- [Ope24a] OpenAI. *ChatGPT*. 2024. URL: <https://www.openai.com/> (žiūrėta 2024-06-06).
- [Ope24b] OpenAI. *ChatGPT*. Atsakymas į klausimą apie citavimo pavyzdį. 2024. URL: <https://chatgpt.com/share/550cde77-019d-414d-b36a-f3ac9b857b9c> (žiūrėta 2024-06-06).
- [Pav05] A. Pavardonis. „Magistrinio darbo pavadinimas“. Magistro darbas. Universiteto pavadinimas, 2005.
- [PPP+02] A. Pavardenis, B. Pavardonis, C. Pavardauskas, D. Pavardinskas. „Straipsnio pavadinimas“. Iš: *Rinkinio pavadinimas*. Miestas, šalis: Leidykla, 2002, puslapiai 3–15.
- [PPP01] A. Pavardenis, B. Pavardonis, C. Pavardauskas. „Straipsnio pavadinimas“. Iš: *Žurnalo pavadinimas IV* (2001), puslapiai 8–17.
- [PPP03] A. Pavardenis, B. Pavardonis, C. Pavardauskas. *Knygos pavadinimas*. 172 psl. Miestas, šalis: Leidykla, 2003.
- [PPP04] A. Pavardenis, B. Pavardonis, C. Pavardauskas. *Elektroninės publikacijos pavadinimas*. <http://example.com/kelias/iki/straipsnio.pdf>. 45 KB, žiūrėta 2015-02-01. 2004.
- [PPP22] A. Pavardenis, B. Pavardonis, C. Pavardauskas. *Duomenų rinkinio pavadinimas*. 2022. URL: nuoroda.
- [pus] I. puslapis. *Puslapio pavadinimas*. URL: [puslapio%20nuoroda](#) (žiūrėta 2024-04-25).
- [SP] A. M. Society, the  $\text{\LaTeX}$  Project. *User’s Guide for the amsmath Package (Version 2.1)*. URL: <https://mirror.macomnet.net/pub/CTAN/macros/latex/required/amsmath/amsl.doc.pdf> (žiūrėta 2024-06-27).
- [STU+02] A. Surname, B. Tsurname, C. Usurname, D. Vsurname. „Article title“. Iš: *Conference book title*. City, country: Publisher, 2002, puslapiai 3–15.
- [STU01] A. Surname, B. Tsurname, C. Usurname. „Article Title“. Iš: *Journal Title IV* (2001), puslapiai 3–15.
- [STU03] A. Surname, B. Tsurname, C. Usurname. *Book title*. 172 p. City, country: Publisher, 2003.
- [STU04] A. Surname, B. Tsurname, C. Usurname. *Online Publication Title*. <http://example.com/path/to/the/article.pdf>. 45 KB, žiūrėta 2015-02-01. 2004.
- [Sur05] A. Surname. „Title fo PhD thesis“. Disertacija. Title of university, 2005.

## 1 priedas. Citavimo pavyzdžiai

Dokumente - *bibliografija.bib*, reikia sudėti visus cituojamus šaltinius ir panaudojus funkciją `{\cite{cituojamo objekto pavadinimas}}` atitinkamas šaltinis bus pridėtas prie literatūros šaltinių sąrašo.

*bibliografija.bib* galima rasti kelių dažniausiai cituojamų šaltinių tipų pavyzdžius:

- internetiniai puslapiai (*@online*) [pus],
- duomenų rinkiniai (*@dataset*) [PPP22]
- straipsniai (*@article*) [PPP01; STU01],
- straipsniai iš konferencijos (*@inproceedings*) [PPP<sup>+</sup>02; STU<sup>+</sup>02],
- knygos (*@book*) [PPP03; STU03],
- baigiamieji darbai (*@thesis arba mastersthesis/phdthesis* [Pav05; Sur05])
- elektroninės publikacijos (*@misc*) [PPP04; STU04]

Taip pat yra pateikti pavyzdžiai - ChatGPT citavimui, tiek bendrai [Ope24a], tiek konkrečiam pokalbiui [Ope24b].